



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО
КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА“
ПЪРВА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА

Габрово, 24-26. X. 2012 г.

Задачи за група Б

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y}$, ако $x=5,1$ и $y=3,14$.
2. Да се пресметне стойността на израза $x_1^{12} + x_2^{12}$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 5x + 11 = 0$.
3. Да се приведе в нормален вид полинома $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)(x-5)(x+6)$.
4. За кои стойности на параметъра a полиномът $f(x) = x^5 + (5-a)x^4 - (5a+7)x^3 + (7a-29)x^2 + (29a+30)x - 30a$ има двукратна нула?
5. Да се реши уравнението $x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0$ в множеството на комплексните числа.
6. Да се определи дефиниционната област на функцията $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x - 2)$.
7. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2012 & x \\ 0 & 1 & 2012 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. За кои стойности на x е вярно равенството $A^{2012} = B$?
8. Да се намери матрицата X , ако $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$.
9. Редицата $\{a_n\}$ е зададена с равенствата $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$ за $n = 3, 4, \dots$. Да се провери верността на равенството $\begin{pmatrix} a_{102} \\ a_{101} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{100} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
10. Да се изследва и реши системата в зависимост от стойностите на параметъра α

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = \alpha^2 \end{cases}$$
11. Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако уравненията на страните му са: $x + 11y - 23 = 0$, $10x - y - 8 = 0$ и $11x + 10y - 142 = 0$.
12. Да се намерят координатите на средата на общата хорда на окръжностите $k_1: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$ и $k_2: (x-7)^2 + (y-5)^2 = 9$.
13. Да се намери уравнението на равнината, която минава през ортогоналните проекции на точка $P(1, 3, -2)$ върху трите координатни равнини.
14. Точките $A(1, 2, 4)$, $B(5, 1, 3)$, $C(4, 2, 1)$ и $D(2, x, 5)$ са върхове на триъгълната пирамида $ABCD$. За кои стойности на x обемът на пирамидата е равен на 2?

15. Да се начертае графиката на функцията $f(x) = |x-a| + |2x+b|$, ако е известно, че минава през точките $A(1,8)$ и $B(-3,10)$.

16. Да се пресметне $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cot x)^{\tan x}$.

17. Да се пресметне $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$, ако $f(x) = \ln(\sin 2x + \cos 3x)$.

18. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 2 & x & x & x \\ x & x & 3 & x & x \\ x & x & x & 4 & x \\ x & x & x & x & 5 \end{vmatrix} \text{ в интервала } [1;5].$$

19. Да се намери най-малкото положително решение на уравнението $\sin x = \cos(4-x)$.

20. Да се намерят корените на уравнението $11 \sin 3x = 9 \ln x$.

21. За кои стойности на параметъра a функцията $f(x) = \sin x + 3a \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x - 6ax$ е растяща в интервала $(-\infty; +\infty)$?

22. Да се намери примитивна функция на функцията $f(x) = |x-1|$ в интервала $(-\infty; +\infty)$.

23. Да се пресметне $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

24. Да се пресметне лицето на равнинната област, определена с неравенството $|x|^3 + |y|^3 \leq 8$.

25. Намерете цяло положително число n , за което

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)} = \frac{1013545}{4054182}.$$

26. Да се намерят всички естествени числа $n \in [2000; 2012]$, които са решения на уравнението

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx) = \frac{1}{2}.$$

27. За кои реални числа a и b равенството $\int_0^{\pi} (at + bt^2) \cos mt \, dt = \frac{1}{m^2}$ е в сила за всяко цяло положително число m ?

28. Да се провери дали функцията $y(x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{4}$ е решение на уравнението

$$y(x) = \cos x + \int_0^x (x-t) y(t) \, dt.$$

29. Да се реши диференциалното уравнение $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \sin 2x + \cos x$ при начални условия $y(0) = y'(0) = 0$.

30. Да се намерят всички четирицифрени числа, квадратът на които завършва на 2016.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност.