



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО  
КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА“  
ПЪРВА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА  
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА

Габрово, 24-26. X. 2012 г.

Задачи за група В

1. Да се пресметне стойността на израза  $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}$  при  $x=2,3$  и  $y=1,2$ .
2. Да се пресметне стойността на израза  $x_2^5 - x_1^5$ , където  $x_1$  и  $x_2$  са корените на уравнението  $x^2 - 2x - 11 = 0$  и  $x_1 < x_2$ .
3. Да се пресметне  $\frac{(-\sqrt{3} + i)^{15}}{(1-i)^{24}}$ .
4. Приведете в нормален вид полинома  $(x-2)^9 - (x+5)^5$ .
5. Разложете на множители с реални коефициенти полинома  $x^8 - 16$ .
6. Да се реши уравнението  $32x^4 - 128x^3 + 114x^2 + 63x - 81 = 0$ .
7. Да се реши неравенството  $\sqrt{5-2x} < 6x-1$ .
8. Да се определи дефиниционната област на функцията  $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x - 6}$ .
9. Да се реши системата 
$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$
10. Да се пресметне детерминантата 
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$
.
11. Да се реши уравнението 
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{vmatrix} = 20$$
.
12. За кои стойности на  $a$  и  $c$  е вярно равенството  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 6 \\ c & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 6 \\ c & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ?
13. Да се начертае графиката на функцията  $f(x) = x^2 + bx + c$ , ако е известно, че минава през точките  $A(2,4)$  и  $B(5,1)$ .
14. Да се пресметне  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .

15. Да се намери производната на функцията  $f(x) = e^{\sqrt{x}} \sin^2 x$ .
16. Да се пресметне  $f''\left(\frac{1}{4}\right)$ , ако  $f(x) = \arccos \sqrt{x}$ .
17. Да се определят интервалите на растене и намаляване на функцията  $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$ .
18. Да се намерят локалните екстремуми на функцията  $f(x) = -3x^4 + 20x^3 - 35x^2 + 24$ .
19. Да се намери най-голямата стойност на функцията  $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$  в интервала  $(0; +\infty)$ .
20. Определете броя на положителните корени на уравнението  $x^3 - 14x + 11 = 0$ .
21. Да се намерят корените на уравнението  $\sin 2x = x$ .
22. За кои стойности на реалния параметър  $a$  уравнението  $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = a$  има решение в множеството на реалните числа?
23. Да се пресметне  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$ .
24. Да се пресметне  $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$ .
25. Да се пресметне лицето на фигурата, заградена от графиките на функциите  $f(x) = 3x - 4x^3$  и  $g(x) = -x^3$  при  $x \geq 0$ .
26. Да се пресметне сумата  $\frac{1^2}{2^3} + \frac{2^2}{3^3} + \dots + \frac{19^2}{20^3}$ .
27. Намерете цяло положително число  $n$ , за което 
$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n.(n+2)} = \frac{3038623}{4054182}$$
28. Да се пресметне сумата  $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots$
29. Да се провери дали функцията  $y(x) = e^x - 1$  е решение на уравнението 
$$y''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)} y'(t) dt = e^{2x}$$
30. Да се реши диференциалното уравнение  $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$  при начални условия  $y(0) = 3, y'(0) = 2$ .

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност.